Ασκήσεις

Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής Γ′ Λυκείου ΕΠΑΛ

Απαντήσεις Θεμάτων Πανελλαδικών [08/06/2019]

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία - Σχολικό βιβλίο σελ. 28

Α2. Θεωρία - Σχολικό βιβλίο σελ. 58-59

Α3. (α′) Λάθος, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

(β′) Σωστό, σχολικό βιβλίο σελ. 33

(γ′) Λάθος, είναι μέτρο θέσης, σχολικό βιβλίο σελ. 86

(δ′) Λάθος, $\alpha_i = \frac{\nu_i}{\nu} \cdot 360^o$, σχολικό βιβλίο σελ. 70

(ε′) Σωστό, σχολικό βιβλίο σελ. 16

ΘΕΜΑ Β

Β1. $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$

$CV = 20\% \Leftrightarrow \frac{s}{|\bar{x}|} = 0,2 \Leftrightarrow |\bar{x}| = \frac{2}{0,2} \Leftrightarrow |\bar{x}| = 10 \Leftrightarrow \bar{x} = 10$ ή $\bar{x} = -10$.

Επειδή οι παρατηρήσεις είναι όλες θετικές, τότε $\bar{x} > 0$, άρα $\bar{x} = 10$.

Β2. $\bar{x} = \frac{11+7+\kappa+13+11+10}{6} \Leftrightarrow 10 = \frac{52+\kappa}{6} \Leftrightarrow 60 = 52+\kappa \Leftrightarrow \kappa = 8$

Β3. Για $\kappa = 8$, οι τιμές είναι: $11, 7, 8, 13, 11, 10$.

Σε αύξουσα σειρά είναι: $7, 8, 10, 11, 11, 13$.

Άρα η διάμεσος είναι $\delta = \frac{10+11}{2} = 10,5$ και το εύρος είναι $R = 13 - 7 = 6$.

Β4. Αν από όλες τις τιμές αφαιρεθεί η τιμή 2, τότε η νέα τυπική απόκλιση s_y δεν μεταβάλλεται, άρα $s_y = s_x = 2$, ενώ η νέα μέση τιμή $\bar{y}$ θα αλλάξει σε $\bar{y} = \bar{x} - 2 = 10 - 2 = 8$.

Άρα ο νέος συντελεστής μεταβολής θα είναι $CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{2}{8} = 25\% > 10\%$, άρα και το νέο δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = \left(\sqrt{x^2-2x+10}\right)' = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+10}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}$.

Γ2. Έχουμε:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	$h(1)$	$\nearrow$	

Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = \sqrt{9} = 3$, άρα $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ3. $f(5) = \sqrt{25} = 5$ και $f'(x) = \dfrac{5}{\sqrt{25}} = \dfrac{4}{5}$

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(5, f(5))$ είναι η:

$y - f(5) = f'(5)(x-5) \Leftrightarrow y - 5 = \dfrac{4}{5}(x-5) \Leftrightarrow y = \dfrac{4}{5}x - 4 + 5 \Leftrightarrow y = \dfrac{4}{5}x + 1.$

Γ4. Για το σημείο τομής με τον xx' : $y = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{4}$, άρα είναι το $A\left(-\dfrac{5}{4}, 0\right)$.

Για το σημείο τομής με τον yy' : $x = 0 \Leftrightarrow y = 1$, άρα είναι το $B(0, 1)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για $\lambda = 3$ έχουμε $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

Άρα: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ κι η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Έχουμε $\dfrac{3}{8} = \dfrac{9}{24}$ και $\dfrac{5}{6} = \dfrac{20}{24}$, άρα $\dfrac{3}{8} < \dfrac{5}{6}$ κι επειδή η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f\left(\dfrac{3}{8}\right) < f\left(\dfrac{5}{6}\right)$.

Δ2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f'(x)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x^2-x\right)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3(x-1)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x^2-x\right)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3(x-1)^2 \cdot (\sqrt{x}+1)}{(x-1)\cdot x \cdot (x-1)} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3\left(\sqrt{x}+1\right)}{x} = \dfrac{3 \cdot 2}{1} = 6$

Δ3. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(x, f(x))$ είναι ίσος με $\lambda(x) = f'(x)$. Άρα αναζητούμε το ελάχιστο της $f'(x)$.

$f''(x) = 6(x-1),\ x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)=6(x-1)$		$+$	0	$-$	
f'		$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	

Άρα, η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$, το $f'(1) = 0$.

Άρα, το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη έχει την ελάχιστη κλίση είναι το $(1, 1)$.

Δ4. Η παραγωγος της f είναι $f'(x) = 3x^2 - 6x + \lambda$.

Για να μην παρουσιάζει ακρότατο η f, θα πρέπει να μην υπάρχει αλλαγή μονοτονίας της f δηλαδή το τριώνυμο $f'(x) = 3x^2 - 6x + \lambda$ να έχει $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow 36 - 12\lambda \leq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lambda \geq 3$.

Άρα, η μικρότερη τιμή του λ ώστε η f να μην παρουσιάζει ακρότατα είναι η $\lambda = 3$.

Επιμέλεια λύσεων: Γιάννης Κουτρούλης
email: g.koutroulis@4praxeis.gr